# 第十单元 计数原理与概率、随机变量及其分布

## 基础课53 两个基本计数原理

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 分类加法计数原理 | 理解 | 2023年新高考Ⅰ卷 | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算 |
| 分步乘法计数原理 | 理解 | 2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国乙卷（理） | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，一般以客观题的形式出现，属于基础题，命题热点是结合排列组合来解决相关计数问题，本基础课与概率知识结合的可能性比较大，且命题背景会比较新颖，预计2025年高考的命题情况变化不大，应加强本基础课知识的综合训练 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、两个计数原理

1*.*分类加法计数原理:完成一件事,可以有*n*类办法,在第1类办法中有*m*1种方法,在第2类办法种有*m*2种方法……在第*n*类办法中有*mn*种方法,那么,完成这件事共有*N=*①*m*1*+m*2*+*…*+mn*种方法*.*(也称“加法原理”)

2*.*分步乘法计数原理:完成一件事需要经过*n*个步骤,缺一不可,做第1步有*m*1种不同的方法,做第2步有*m*2种不同的方法…做第*n*步有*mn*种不同的方法,那么,完成这件事共有*N=*②*m*1·*m*2·…·*mn*种方法*.*(也称“乘法原理”)

##### 二、两个计数原理的区别与联系

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 分类加法计数原理 | 分步乘法计数原理 |
| 相同点 | 用来计算完成一件事的方法种数 | |
| 不同点 | 每类方案中的每一种方法都能独立完成这件事 | 每步依次完成才算完成这件事（每步中的每一种方法都不能独立完成这件事） |
| 注意点 | 类类独立，不重不漏 | 步步相依，缺一不可 |

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 在分类加法计数原理中，两类不同方案中的方法可以相同.( × )

（2） 在分类加法计数原理中，每类方案中的方法都能直接完成这件事.( √ )

（3） 在分步乘法计数原理中，每个步骤中完成这个步骤的方法是各不相同的.( √ )

（4） 在分步乘法计数原理中，事情是分多步完成的，其中任何一个单独步骤都可以完成这件事.( × )

2. （易错题）2160的不同的正因数个数为40.

【**易错点**】此处容易忽略考虑2160的每一个素因子及其幂次，同时此处因子计数要考虑指数取0的情况.

[解析]由题意，，则2160的正因数,，因为可取0，1，2，3，4，可取0，1，可取0，1，2，3，所以2160有个不同的正因数.

##### 题组2 走进教材

3. （双空题）（人教A版选修③P6·T4改编）现有高一年级的学生3名，高二年级的学生5名，高三年级的学生4名.从三个年级的学生中任选1人参加接待外宾的活动，有12种不同的选法；从三个年级的学生中各选1人参加接待外宾的活动，有60种不同的选法.

[解析]从高一年级的学生中选取1名，有3种选法；从高二年级的学生中选取1名，有5种选法；从高三年级的学生中选取1名，有4种选法.从三个年级的学生中任选1人参加活动，共有种不同的选法；从三个年级的学生中各选1人参加活动，共有种不同的选法.

4. （人教A版选修③P7·T5改编）由数字1，2，3，4，5，6可以组成216个三位数.

[解析]由题意，百位、十位和个位上的数字均有6种选法，所以可以组成个三位数.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·新高考Ⅰ卷改编]某学校开设了3门体育类选修课和3门艺术类选修课，学生需从这6门课中选修2门或3门课，若每类选修课至少选修1门，则不同的选课方案共有27种.（用数字作答）

[解析]当从6门课中选修2门时，不同的选课的方案共有（种）.当从6门课中选修3门时，若体育类选修课1门，则不同的选课方案共有（种）；若体育类选修课2门，则不同的选课方案共有（种）.综上，不同的选课方案共有（种）.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 分类加法计数原理［自主练透］

1. 现有5幅不同的油画，2幅不同的国画，7幅不同的水彩画，若从这些画中选一幅布置房间，则不同的选法共有( C ).

A. 7种 B. 9种 C. 14种 D. 70种

[解析]分为三类：从油画中选，有5种不同的选法;从国画中选，有2种不同的选法;从水彩画中选，有7种不同的选法.根据分类加法计数原理，共有种不同的选法.故选.

2. 已知集合,,，,5,6,，若从这两个集合中各取一个元素作为点的横坐标或纵坐标，则可得平面直角坐标系中第一、二象限内不同点的个数是( C ).

A. 18 B. 16 C. 14 D. 10

[解析]分两类情况讨论：

第一类，从中取的元素作为横坐标，从中取的元素作为纵坐标，则第一、二象限内的点共有（个）；

第二类，从中取的元素作为纵坐标，从中取的元素作为横坐标，则第一、二象限内的点共有（个）.

由分类加法计数原理，得所求个数为14.故选.

3. 若从数字1，2，3，4中取出3个数字（允许重复），组成三位数，各位数字之和等于6，则这样的三位数的个数为( C ).

A. 7 B. 9 C. 10 D. 13

[解析]各位数字之和等于6的三位数可分为以下情形：

①由1，1，4三个数字组成的三位数有114，141，411，共3个；

②由1，2，3三个数字组成的三位数有123，132，213，231，312，321，共6个；

③由2，2，2三个数字可以组成1个三位数，即222.

故共有10个.故选.



**分类加法计数原理分类标准的选择**

1.应抓住题目中的关键词、关键元素、关键位置，根据题目特点恰当选择一个分类标准；

2.分类时应注意完成这件事情的任何一种方法必须属于某一类，并且分别属于不同种类的两种方法是不同的方法，不能重复，但也不能有遗漏.

#### 考点二 分步乘法计数原理［自主练透］

1. 某大学食堂备有6种素菜、5种荤菜、3种汤，若要配成一荤一素一汤的套餐，则可以配成不同套餐的种数为( D ).

A. 30 B. 14 C. 33 D. 90

[解析]因为备有6种素菜、5种荤菜、3种汤，所以素菜有6种选法，荤菜有5种选法，汤菜有3种选法，所以要配成一荤一素一汤的套餐，可以配制出不同的套餐有（种）.故选.

2. 如果在一次运动会上有四项比赛的冠军在甲、乙、丙三人中产生，那么不同的夺冠情况共有( C )种.

A. B. C. D.

[解析]由题意四项比赛的冠军依次在甲、乙、丙三人中选取，每项冠军都有3种选取方法，由分步乘法计数原理共有种.故选.

3. 某学校推出了《植物栽培》《手工编织》《实用木工》《实用电工》4门选修课程，若要求每个学生从中任选2门进行学习，则甲、乙两名同学的选课中恰有一门课程相同的选法有( B )种.

A. 16 B. 24 C. 12 D. 36

[解析]甲先从4门课程中选择1门，有4种选法，乙再从剩下的3门中选择1门，有3种选法，甲、乙再从剩下的2门中共同选择1门，有2种选法，根据分步乘法计数原理可得甲、乙两名同学的选课中恰有一门课程相同的选法为（种）.故选.



**分步乘法计数原理应注意的问题**

1.明确题目中所要完成的这件事是什么，确定完成这件事需要几个步骤；

2.将完成这件事划分成几个步骤来执行，各步骤之间有一定的连续性，只有当所有步骤都完成了，这件事才算完成，这是分步的基础，也是关键.从计数上来看，各步骤的方法数的积就是完成这件事的方法总数.

#### 考点三 两个计数原理的综合应用［多维探究］

##### 数字问题角度1

典例1 若用数字1，2，3，4组成没有重复数字的三位数，则其中奇数的个数为( B ).

A. 6 B. 12 C. 16 D. 18

[解析]先排个位，有2种排法，再排百位和十位，有种排法，因此共有种排法，故选.

##### 涂色问题角度2

典例2 用红、黄、蓝三种颜色去涂如图所示的标号为1,2, ,9的9个小长方形，使得任意相邻（有公共边）的小长方形所涂颜色都不相同，且标号为1，5，9的小长方形涂相同的颜色，则符合条件的所有涂法共有( A ).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

A. 108种 B. 60种 C. 48种 D. 36种

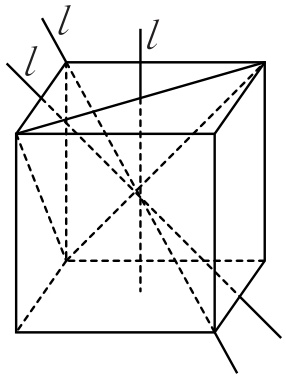
[解析]首先1，5，9颜色确定，有3种可能，于是2，6就只有4种可能.如果2，6颜色相同，那么3就有2种可能.若2，6颜色不同，则3只有1种可能.故右上角三个数有种排法.同理左下角三个数有6种排法.共有种可能.故选.

##### 几何图形问题角度3

典例3 若一个正方体绕着某直线旋转不到一周后能与自身重合，则这样的直线的条数为( D ).

A. 3 B. 4 C. 6 D. 13

[解析]若正方体绕着直线旋转不到一周能与自身重合，则必过正方体的中心，否则，正方体绕着直线旋转不到一周后，中心不能回到原来的位置，共有三种情况，如图所示.



当过正方体的体对角线时，把正方体绕旋转，正方体回到原来的位置，此时直线共有4条；

当过正方体两相对棱的中点时，把正方体绕旋转 ，正方体回到原来的位置，此时直线共有6条；

当过正方体相对面的中心时，把正方体绕旋转，正方体回到原来的位置，此时直线共有3条.

综上，符合条件的直线有（条）.

故选.



**两个计数原理的综合应用的一般思路**

1.弄清完成一件事是做什么；

2.确定是先分类后分步，还是先分步后分类；

3.弄清分步，分类的标准是什么；

4.利用两个计数原理求解.

##### 多维训练

1. 若用数字1，2，3组成五位数，且数字1，2，3都至少出现一次，则这样的五位数共有( B )个.

A. 120 B. 150 C. 210 D. 240

[解析]首先考虑全部的情况，即每个数位均有3种选择，共有（个），其中包含数字全部相同只有3种情况，

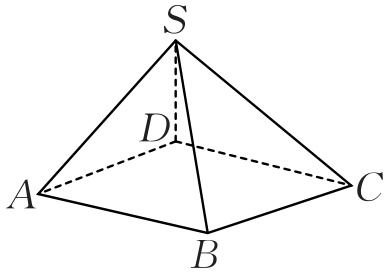
只出现2个数字的共有（个），

因此，满足条件的五位数的个数为（个）.故选.

2. 将一个正四棱锥的每一个顶点染上一种颜色，并使同一条棱上的两端异色，若只有5种颜色可供使用，则不同的染色方法总数为( C ).

A. 180 B. 240 C. 420 D. 480

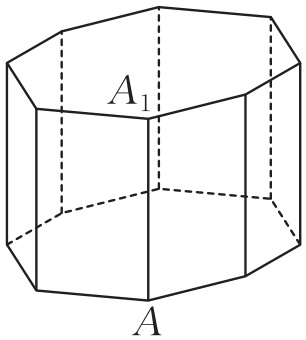
[解析]如图，四棱锥的顶点,,所染的颜色互不相同,它们共有种染色方法.



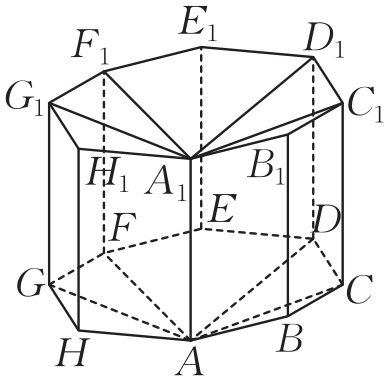
当,,染好时，不妨设所染颜色依次为1,2,3，若染2，则可染3或4或5，有3种染法；若染4,则可染3或5，有2种染法；若染5，则可染3或4，有2种染法,即当,,染好时，,还有7种染法.

故不同的染色方法有（种）.故选.

3. 在《九章算术》中，称底面为矩形且有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马.设是正八棱柱的一条侧棱，如图，若阳马以该正八棱柱的顶点为顶点，以为底面矩形的一边，则这样的阳马的个数是24.



[解析]如图，根据正八边形的性质可得，底面边长都相等，底面每个内角都为 ，



， ，所以，，，

又因为 平面，且，所以 平面，

又因为，

所以共有4个阳马；

同理， 平面，共4个； 平面，共4个；

平面，共4个； 平面，共4个； 平面，共4个.故共有24个阳马.